

## Le programme du lycée

### Comment utiliser ce document ?

Vous avez, condensés dans ces pages, tous les points du programme officiel qui sont importants pour la prépa (vous remarquerez notamment que je n'ai pas mis de graphes, vus en maths expertes, ou de statistiques). Chaque point est marqué avec l'année du lycée correspondant : seconde, première, terminale ou maths expertes.

- les **Définitions à connaître** sont des définitions ou des propositions **que vous devez pouvoir énoncer avec précision**.
- les **Démonstrations à savoir refaire** sont des preuves normalement faites au lycée et qu'il faudrait pouvoir refaire
- les **Approfondissements possibles** sont des points facultatifs du programme de lycée. Si vous avez fait ces points, c'est un + pour vous, mais ce n'est pas nécessaire de les avoir faits !

Nous vous conseillons d'utiliser ce document pour faire un bilan de vos années lycée : ce que vous avez fait au lycée est une excellente base pour la prépa. N'hésitez pas à faire une première lecture en cochant tout ce qui vous semble maîtrisé : cela fera une bonne photographie d'où vous en êtes. Si vous avez le temps, vous pouvez combler certains manques, mais ne vous dites pas que vous devez absolument combler tous les points manquants dans le programme : le début de la sup repassera sur toutes les notions du programme de lycée.

## 1 Algèbre

### 1.1 Logique et théorie des ensembles

Vous avez appris, au lycée, à

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fautive ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication, ou sa contraposée ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles  $\forall$  et  $\exists$  ne sont pas exigibles) ;
- raisonner par disjonctions des cas, par l'absurde, par contraposée ;
- raisonner par équivalence, utiliser une propriété caractéristique ;
- distinguer condition nécessaire et condition suffisante ;
- démontrer une propriété par récurrence.

### 1.2 Calculs algébriques

#### Définitions à connaître

- **[2nde]** Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation  $\sqrt{a^2} = |a|$ .
- **[2nde]** Identités  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  et  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , à savoir utiliser dans les deux sens.

- **[2nde]** Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- **[2nde]** Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- **[2nde]** Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[2nde]** Quels que soient les réels positifs  $a$  et  $b$ , on a  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ .
- **[2nde]** Si  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs,  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .
- **[2nde]** Pour  $a$  et  $b$  réels positifs, illustration géométrique de l'égalité  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

**Approfondissements possibles**

- **[2nde]** Développement de  $(a+b+c)^2$ .
- **[2nde]** Développement de  $(a+b)^3$ .
- **[2nde]** Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs.

## 1.3 Nombres complexes

**Définitions à connaître**

- **[Exp]** Ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.
- **[Exp]** Conjugaison. Propriétés algébriques.
- **[Exp]** Inverse d'un nombre complexe non nul.
- **[Exp]** Formule du binôme dans  $\mathbb{C}$ .
- **[Exp]** Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur.
- **[Exp]** Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.
- **[Exp]** Relation  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Module d'un produit, d'un inverse.
- **[Exp]** Ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1. Stabilité de  $\mathbb{U}$  par produit et passage à l'inverse.
- **[Exp]** Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.
- **[Exp]** Forme trigonométrique.
- **[Exp]** Exponentielle imaginaire, notation  $e^{i\theta}$ . Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.
- **[Exp]** Interprétation géométrique du module et d'un argument de  $\frac{c-a}{b-a}$ .
- **[Exp]** Racines  $n$ -ièmes de l'unité. Description de l'ensemble  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particuliers :  $n = 2, 3, 4$ .

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Exp]** Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.
- **[Exp]** Formule du binôme.
- **[Exp]** Formule  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Module d'un produit. Module d'une puissance.
- **[Exp]** Détermination de l'ensemble  $\mathbb{U}_n$ .
- **[Exp]** Somme des racines  $n$ -ièmes de l'unité.
- **[Exp]** Racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe.

**Approfondissements possibles**

- **[Exp]** Suite de nombres complexes définie par  $z_{n+1} = az_n + b$
- **[Exp]** Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.

## 1.4 Trigonométrie

### Définitions à connaître

- **[1re]** Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- **[1re]** Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- **[1re]** Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- **[Exp]** Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.
- **[Exp]** Exponentielle imaginaire, notation  $e^{i\theta}$ . Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.
- **[Exp]** Formules d'Euler :  $\cos(\theta) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ ,  $\sin(\theta) = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ .
- **[Exp]** Formule de Moivre :  $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$ .

### Démonstrations à savoir refaire

- Calcul de  $\sin \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \frac{\pi}{3}$ ,  $\sin \frac{\pi}{3}$

### Approfondissements possibles

- 

## 1.5 Équations polynomiales

### Définitions à connaître

- **[1re]** Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- **[1re]** Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.
- **[Exp]** Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels.
- **[Exp]** Factorisation de  $z^n - a^n$  par  $z - a$ .
- **[Exp]** Si  $P$  est un polynôme et  $P(a) = 0$ , factorisation de  $P$  par  $z - a$ .
- **[Exp]** Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.

### Démonstrations à savoir refaire

- **[1re]** Résolution de l'équation du second degré.
- **[Exp]** Factorisation de  $z^n - a^n$  par  $z - a$ . Factorisation de  $P(z)$  par  $z - a$  si  $P(a) = 0$ .
- **[Exp]** Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

### Approfondissements possibles

- **[1re]** Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine et résolution de l'équation associée.
- **[1re]** Factorisation de  $x^n - 1$  par  $x - 1$ , de  $x^n - a^n$  par  $x - a$ .
- **[1re]** Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme  $s$  et leur produit  $p$  comme racines de la fonction polynôme  $x \mapsto x^2 - sx + p$ .
- **[Exp]** Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes.
- **[Exp]** Formules de Viète.

## 1.6 Arithmétique

### Définitions à connaître

- [2nde] Notations  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$ .
- [2nde] Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair.

### Démonstrations à savoir refaire

- [2nde] Pour une valeur numérique de  $a$ , la somme de deux multiples de  $a$  est multiple de  $a$ .
- [2nde] Le carré d'un nombre impair est impair.

## 1.7 Géométrie du plan

### Définitions à connaître

- [2nde] Vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  associé à la translation qui transforme  $M$  en  $M'$ . Direction, sens et norme.
- [2nde] Égalité de deux vecteurs. Notation  $\vec{u}$ . Vecteur nul.
- [2nde] Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- [2nde] Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- [2nde] Expression des coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  en fonction de celles de  $A$  et de  $B$ .
- [2nde] Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- [2nde] Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité.
- [2nde] Application à l'alignement, au parallélisme.
- [2nde] Vecteur directeur d'une droite.
- [2nde] Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- [2nde] Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
- [2nde] Projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- [1re] Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus.
- [1re] Caractérisation de l'orthogonalité.
- [1re] Bilinearité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- [1re] Développement de  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ . Formule d'Al-Kashi.
- [1re] Transformation de l'expression  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .
- [1re] Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées  $(a, b)$  est normal à la droite d'équation  $ax + by + c = 0$ . Le vecteur  $(-b, a)$  en est un vecteur directeur.
- [1re] Équation de cercle.
- [Tle] Vecteurs de l'espace. Translations.
- [Tle] Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- [Tle] Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
- [Tle] Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- [Tle] Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
- [Tle] Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- [Tle] Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

### Démonstrations à savoir refaire

- [2nde] Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- [2nde] En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

- **[2nde]** Le projeté orthogonal du point  $M$  sur une droite  $\Delta$  est le point de la droite  $\Delta$  le plus proche du point  $M$ .
- **[2nde]** Relation trigonométrique  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  dans un triangle rectangle.
- **[1re]** Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).
- **[1re]** Ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  (démonstration avec le produit scalaire).
- **[1re]** Recherche de l'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point donné.
- **[1re]** Déterminer l'intersection d'un cercle ou d'une parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  avec une droite parallèle à un axe.

### Approfondissements possibles

- **[2nde]** Définition vectorielle des homothéties.
- **[2nde]** Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- **[2nde]** Expression de l'aire d'un triangle :  $\frac{1}{2}ab \sin C$ .
- **[2nde]** Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.
- **[2nde]** Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- **[2nde]** Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.
- **[1re]** Loi des sinus.
- **[1re]** Droite d'Euler d'un triangle.
- **[1re]** Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.
- **[Tle]** Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
- **[Tle]** Fonction vectorielle de Leibniz.

## 1.8 Géométrie de l'espace

### Définitions à connaître

- **[Tle]** Vecteurs de l'espace. Translations.
- **[Tle]** Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- **[Tle]** Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
- **[Tle]** Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- **[Tle]** Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
- **[Tle]** Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- **[Tle]** Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.
- **[Tle]** Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie.
- **[Tle]** Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
- **[Tle]** Base orthonormée, repère orthonormé.
- **[Tle]** Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
- **[Tle]** Développement de  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ , formules de polarisation.
- **[Tle]** Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.
- **[Tle]** Vecteur normal à un plan. Étant donné un point  $A$  et un vecteur non nul  $\vec{n}$ , plan passant par  $A$  et normal à  $\vec{n}$ .

- **[Tle]** Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.
- **[Tle]** Représentation paramétrique d'une droite.
- **[Tle]** Équation cartésienne d'un plan.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Tle]** Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .
- **[Tle]** Équation cartésienne du plan normal au vecteur  $\vec{n}$  et passant par le point  $A$ .

**Approfondissements possibles**

- **[Tle]** Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
- **[Tle]** Fonction vectorielle de Leibniz.
- **[Tle]** Intersection d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère en un point.
- **[Tle]** Sphère circonscrite à un tétraèdre.
- **[Tle]** Fonction scalaire de Leibniz.
- **[Tle]** Déterminer l'intersection de deux plans.
- **[Tle]** Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
- **[Tle]** Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.
- **[Tle]** Intersection d'une sphère et d'une droite.

## 1.9 Arithmétique

**Définitions à connaître**

- **[Exp]** Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ .
- **[Exp]** Division euclidienne d'un élément de  $\mathbb{Z}$  par un élément de  $\mathbb{N}^*$ .
- **[Exp]** Congruences dans  $\mathbb{Z}$ . Compatibilité des congruences avec les opérations.
- **[Exp]** PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide.
- **[Exp]** Couples d'entiers premiers entre eux.
- **[Exp]** Théorème de Bézout.
- **[Exp]** Théorème de Gauss.
- **[Exp]** Nombres premiers. Leur ensemble est infini.
- **[Exp]** Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
- **[Exp]** Petit théorème de Fermat.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Exp]** Écriture du PGCD de  $a$  et  $b$  sous la forme  $ax + by$ ,  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .
- **[Exp]** Théorème de Gauss.
- **[Exp]** L'ensemble des nombres premiers est infini.

**Approfondissements possibles**

- **[Exp]** Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.
- **[Exp]** Lemme chinois et applications à des situations concrètes.
- **[Exp]** Démonstrations du petit théorème de Fermat.
- **[Exp]** Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee).
- **[Exp]** Étude de tests de primalité : notion de témoin, nombres de Carmichael.
- **[Exp]** Problèmes de chiffrement (affine, Vigenère, Hill, RSA).

- **[Exp]** Recherche de nombres premiers particuliers (Mersenne, Fermat).
- **[Exp]** Exemples simples de codes correcteurs.
- **[Exp]** Étude du système cryptographique RSA.
- **[Exp]** Détermination des triplets pythagoriciens.
- **[Exp]** Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss.
- **[Exp]** Étude de l'équation de Pell-Fermat.

## 2 Analyse

### 2.1 Calculs dans $\mathbb{R}$

#### Définitions à connaître

- **[2nde]** Ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, droite numérique.
- **[2nde]** Intervalles de  $\mathbb{R}$ . Notations  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- **[2nde]** Notation  $|a|$ . Distance entre deux nombres réels.
- **[2nde]** Représentation de l'intervalle  $[a - r, a + r]$  puis caractérisation par la condition  $|x - a| \leq r$ .
- **[2nde]** Ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à  $10^{-n}$  près.
- **[2nde]** Ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple  $\sqrt{2}$  et  $\pi$ .

#### Démonstrations à savoir refaire

- **[2nde]** Le nombre rationnel  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.
- **[2nde]** Le nombre réel  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

### 2.2 Généralités sur les fonctions

#### Définitions à connaître

- **[2nde]** Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de  $\mathbb{R}$ .
- **[2nde]** Courbe représentative : la courbe d'équation  $y = f(x)$  est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient  $y = f(x)$ .
- **[2nde]** Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- **[2nde]** Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- **[2nde]** Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- **[2nde]** Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- **[2nde]** Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

#### Démonstrations à savoir refaire

- 

#### Approfondissements possibles

- **[2nde]** Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

## 2.3 Fonctions usuelles

### Définitions à connaître

- **[2nde]** Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.
- **[1re]** Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ . L'existence et l'unicité sont admises. Notation  $\exp(x)$ .
- **[1re]** Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$  et  $\exp(x) \exp(-x) = 1$ . Nombre  $e$ . Notation  $e^x$ .
- **[1re]** Pour tout réel  $a$ , la suite  $(e^{na})$  est une suite géométrique.
- **[1re]** Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.
- **[Tle]** Fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- **[Tle]** Propriétés algébriques du logarithme.
- **[Tle]** Fonction dérivée du logarithme, variations.
- **[Tle]** Limites en 0 et en  $+\infty$ , courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- **[Tle]** Croissance comparée du logarithme népérien et de  $x \mapsto x^n$  en 0 et en  $+\infty$ .
- **[1re]/[Tle]** Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

### Démonstrations à savoir refaire

- **[2nde]** Étudier la position relative des courbes d'équation  $y = x, y = x^2, y = x^3$ , pour  $x \geq 0$ .
- **[2nde]** Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.
- **[Tle]** Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- **[Tle]** Limite en 0 de  $x \mapsto x \ln(x)$ .

### Approfondissements possibles

- **[2nde]** Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur  $\mathbb{R}^+$ .
- **[1re]** Unicité d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .
- **[1re]** Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ .
- **[1re]** La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.
- **[Tle]** Pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , fonction  $x \mapsto x^\alpha$ .
- **[Tle]** Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , limite de  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .
- **[Tle]** Fonction tangente.

## 2.4 Dérivation

### Définitions à connaître

- **[1re]** *Point de vue local*
  - Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
  - Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation  $f'(a)$ .
  - Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est la droite d'équation  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
- **[1re]** *Point de vue global*
  - Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
  - Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.

- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de  $x \mapsto g(ax + b)$
- Pour  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , fonction dérivée de la fonction  $x \mapsto x^n$ .
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0 .
- **[Ire]** Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.
- **[Ire]** Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.
- **[Tle]** Composée de deux fonctions, notation  $v \circ u$ . Relation  $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$  pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- **[Tle]** Dérivée seconde d'une fonction.
- **[Tle]** Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de  $f'$ , la positivité de  $f''$ .
- **[Tle]** Point d'inflexion.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Ire]** Équation de la tangente en un point à une courbe représentative.
- **[Ire]** La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 .
- **[Ire]** Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- **[Ire]** Fonction dérivée d'un produit.
- **[Tle]** Si  $f''$  est positive, alors la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de ses tangentes.

**Approfondissements possibles**

- **[Tle]** Courbe de Lorenz.
- **[Tle]** Dérivée  $n$ -ième d'une fonction. Inégalité arithmético-géométrique.

## 2.5 Équations différentielles

**Définitions à connaître**

- **[Tle]** Équation différentielle  $y' = f$ . Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- **[Tle]** Primitives des fonctions de référence :  $x \mapsto x^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ , exponentielle, sinus, cosinus.
- **[Tle]** Équation différentielle  $y' = ay$ , où  $a$  est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle  $y' = ay + b$

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Tle]** Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- **[Tle]** Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un nombre réel.

**Approfondissements possibles**

- **[Tle]** Résolution par la méthode d'Euler de  $y' = f$ , de  $y' = ay + b$ .

## 2.6 Calcul intégral

**Définitions à connaître**

- **[Tle]** Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment  $[a, b]$ , comme aire sous la courbe représentative de  $f$ . Notation  $\int_a^b f(x)dx$ .

- **[Tle]** Théorème : si  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$ , alors la fonction  $F_a$  définie sur  $[a, b]$  par  $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .
- **[Tle]** Sous les hypothèses du théorème, relation  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$ . Notation  $[F(x)]_a^b$ .
- **[Tle]** Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- **[Tle]** Définition par les primitives de  $\int_a^b f(x)dx$  lorsque  $f$  est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant  $a$  et  $b$ .
- **[Tle]** Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- **[Tle]** Valeur moyenne d'une fonction.
- **[Tle]** Intégration par parties.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Tle]** Pour une fonction positive croissante  $f$  sur  $[a, b]$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$ . Pour toute primitive  $F$  de  $f$ , relation  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .
- **[Tle]** Intégration par parties.

**Approfondissements possibles**

- **[Tle]** Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes.
- **[Tle]** Encadrement de  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  par des intégrales.

## 2.7 Suites numériques

**Définitions à connaître**

- **[Ire]** Exemples de modes de génération d'une suite : explicite  $u_n = f(n)$ , par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , par un algorithme, par des motifs géométriques. Notations :  $u(n)$ ,  $u_n$ ,  $(u(n))$ ,  $(u_n)$ .
- **[Ire]** Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de  $1 + 2 + \dots + n$ .
- **[Ire]** Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de  $1 + q + \dots + q^n$ .
- **[Ire]** Sens de variation d'une suite.
- **[Ire]** Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.
- **[Tle]** La suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $[A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées.
- **[Tle]** Suite tendant vers  $-\infty$ .
- **[Tle]** La suite  $(u_n)$  converge vers le nombre réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- **[Tle]** Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- **[Tle]** Opérations sur les limites.
- **[Tle]** Comportement d'une suite géométrique  $(q^n)$  où  $q$  est un nombre réel.
- **[Tle]** Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Ire]** Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.

- **[Ire]** Calcul de  $1 + 2 + \dots + n$ .
- **[Ire]** Calcul de  $1 + q + \dots + q^n$
- **[Tle]** Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
- **[Tle]** Limite de  $(q^n)$ , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- **[Tle]** Divergence vers  $+\infty$  d'une suite minorée par une suite divergeant vers  $+\infty$ .
- **[Tle]** Limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction exponentielle.

#### Approfondissements possibles

- **[Ire]** Somme des  $n$  premiers carrés, des  $n$  premiers cubes.
- **[Tle]** Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- **[Tle]** Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- **[Tle]** Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

## 2.8 Limites de fonctions et continuité

#### Définitions à connaître

- **[Tle]** Limite finie ou infinie d'une fonction en  $+\infty$ , en  $-\infty$ , en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- **[Tle]** Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- **[Tle]** Limites et comparaison.
- **[Tle]** Opérations sur les limites.
- **[Tle]** Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- **[Tle]** Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- **[Tle]** Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

#### Démonstrations à savoir refaire

- **[Tle]** Croissance comparée de  $x \mapsto x^n$  et  $\exp$  en  $+\infty$ .

#### Approfondissements possibles

- **[Tle]** Asymptotes obliques. Branches infinies.
- **[Tle]** Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.
- **[Tle]** Fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pour tous réels  $x, y$ .
- **[Tle]** Prolongement par continuité.

## 3 Dénombrement et probabilités

### 3.1 Dénombrement

#### Définitions à connaître

- **[Tle]** Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- **[Tle]** Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de  $k$ -uplets (ou  $k$ -listes) d'un ensemble à  $n$  éléments.
- **[Tle]** Nombre des parties d'un ensemble à  $n$  éléments. Lien avec les  $n$ -uplets de  $\{0, 1\}$ , les mots de longueur  $n$  sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de  $n$  épreuves de Bernoulli.

- **[Tle]** Nombre des  $k$ -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à  $n$  éléments. Définition de  $n!$
- **[Tle]** Nombre de permutations d'un ensemble fini à  $n$  éléments.
- **[Tle]** Combinaisons de  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments : parties à  $k$  éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- **[Tle]** Pour  $0 \leq k \leq n$ , formules :  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .
- **[Tle]** Explicitation pour  $k = 0, 1, 2$ . Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

#### Démonstrations à savoir refaire

- **[Tle]** Démonstration par dénombrement de la relation :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .
- **[Tle]** Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

#### Approfondissements possibles

- Combinaisons avec répétitions.

## 3.2 Probabilités

#### Définitions à connaître

- **[2nde]** Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- **[2nde]** Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- **[2nde]** Relation  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .
- **[2nde]** Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.
- **[1re]** Probabilité conditionnelle d'un événement  $B$  sachant un événement  $A$  de probabilité non nulle. Notation  $P_A(B)$ . Indépendance de deux événements.
- **[1re]** Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- **[1re]** Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- **[1re]** Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.
- **[1re]** Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- **[1re]** Loi d'une variable aléatoire.
- **[1re]** Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.
- **[Tle]** Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue  $(x_1, \dots, x_n)$  est égale au produit des probabilités des composantes  $x_i$ . Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- **[Tle]** Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- **[Tle]** Schéma de Bernoulli : répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes.
- **[Tle]** Loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  : loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.
- **[Tle]** Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(aX) = aE(X).$$

- **[Tle]** Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes  $X, Y$  et relation d'additivité  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ . Relation  $V(aX) = a^2V(X)$ .
- **[Tle]** Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.

- **[Tle]** Échantillon de taille  $n$  d'une loi de probabilité : liste  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  et de la moyenne  $M_n = S_n/n$ .
- **[Tle]** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire  $X$  d'espérance  $\mu$  et de variance  $V$ , et quel que soit le réel strictement positif  $\delta$  :  $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ .
- **[Tle]** Inégalité de concentration. Si  $M_n$  est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et de variance  $V$ , alors pour tout  $\delta > 0$ ,  $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ .
- **[Tle]** Loi des grands nombres.

**Démonstrations à savoir refaire**

- **[Tle]** Expression de la probabilité de  $k$  succès dans le schéma de Bernoulli.
- **[Tle]** Espérance et variance de la loi binomiale.

**Approfondissements possibles**

- **[Ire]** Exemples de succession de plusieurs épreuves indépendantes. Exemples de marches aléatoires.
- **[Ire]** Formule de König-Huygens.
- **[Ire]** Pour  $X$  variable aléatoire, étude de la fonction du second degré  $x \mapsto E((X - x)^2)$ .
- **[Tle]** Loi géométrique.
- **[Tle]** Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares).
- **[Tle]** Relation  $E(XY) = E(X)E(Y)$  pour des variables aléatoires indépendantes  $X, Y$ . Application à la variance de  $X + Y$ .
- **[Tle]** Estimation.
- **[Tle]** Marche aléatoire.